

بِسْمِ تَعَالَى

حل تمرین ریاضی ۲ سری اول

WWW.ME2CH.COM

۱- میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = 2xz\vec{i} - z^3\vec{j} + (x^2 - 3yz^2)\vec{k}$ داده شده است.

الف) آیا \vec{F} میدانی پایستار است؟ چرا؟

ب) آیا میدانی برداری مانند \vec{G} یافت میشود که $\vec{F} = \text{curl}\vec{G}$ ؟ چرا؟

۲- با استفاده از تغییر متغیر مناسب، انتگرال دو گانه $\iint_D (x-y)^4 e^n dA$ را که در اینجا $(n=x+y)$ و

$D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ به دست آورید.

۳- درستی قضیه دیورژانس را برای ناحیه $E = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$

و میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = 3x\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ تحقیق کنید.

۴- انتگرال مکرر زیر در مختصات کروی داده شده است. آن را در مختصات استوانه ای بنویسید.

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^2 \rho^3 \sin^2 \phi d\rho d\phi d\theta \quad (\text{محاسبه انتگرال لازم نیست})$$

۵- با استفاده از قضیه استوکس مقدار $\int_C (y + \sin x) dx + (z^2 + \cos y) dy + x^3 dz$ را حساب کنید که در این جا C منحنی محل برخورد رویه $z = 2xy$ و استوانه $x^2 + y^2 = 1$ است که اگر از بالا به آن نگاه کنیم، جهتش پاد ساعتگرد است.

۶- انتگرال مکرر زیر را در مختصات کروی و مختصات استوانه ای بنویسید. (نیازی به محاسبه انتگرال نیست)

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy$$

۷- انتگرال دوگانه $\iint_R y^2 dA$ را که در آن R ناحیه محصور بین منحنی های $xy=1$ ، $xy=2$ ، $xy^2=1$ و $xy^2=2$ است به دست آورید.

۸- الف) با استفاده از قضیه گرین، انتگرال خط $\int_C -xy dx + (y^2 + 16) dy$ را که در آن C از نیمه بالایی بیضی

$4x^2 + y^2 = 1$ و پاره خط واصل بین نقاط $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ تشکیل شده و در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت پیموده شده است، بیابید.

(ب) انتگرال خط قسمت الف را به طور مستقیم نیز محاسبه کنید.

۹- درستی قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $\vec{F} = Z\vec{i} + Y\vec{j} + X\vec{k}$ و سطح بسته S محدود به سهمی گون

$Z = 1 - X^2 - Y^2$ و صفحه $Z = 0$ تحقیق کنید.

۱۰- فرض کنید C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه $y = 1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ باشد که از دید ناظری که از سمت محور Z مثبت به آن می نگردد، در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت پیموده شده است.

فرض کنید $\vec{F} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ یک میدان برداری باشد.

الف) انتگرال خط $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را به طور مستقیم محاسبه کنید.

ب) انتگرال خط $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را با استفاده از قضیه استوکس به دست آورید.